

Développement : Propriétés de l'indice et application au calcul d'intégrale

Définition Soit $\gamma : I := [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$. On définit l'indice du chemin γ par rapport au point a par

$$\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz.$$

Proposition 1. Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω .
 2. Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de Ω .
 3. Ind_γ est nulle sur la composante connexe non bornée de Ω .

Démonstration. Soient γ, a comme ci-dessus.

$$1. \text{ On a } \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)-a} dz.$$

De plus, $\forall \omega \in \mathbb{C}$, ω est un entier ssi $\omega = 2ik\pi$ ie ssi $e^\omega = e^{2ik\pi} = 1$.

Posons $\varphi(t) := \exp \left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)-a} dz \right)$, $t \in [\alpha, \beta]$. On peut donc reformuler le problème : Ind_γ est un entier ssi $\varphi(\beta) = 1$. Montrons donc que $\varphi(\beta) = 1$.

φ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de dérivée

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} \exp \left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)-a} dz \right) = \frac{\gamma'(t)\varphi(t)}{\gamma(t)-a},$$

$\forall t \in [\alpha, \beta]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où γ ne serait pas dérivable ; on note S l'ensemble de ces points.

La fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-a}$ est continue sur $[\alpha, \beta]$, de dérivée :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-a} \right)' &= \frac{\varphi'(t)(\gamma(t)-a) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^2} \\ &= \frac{\varphi'(t)}{\gamma(t)-a} - \frac{1}{\gamma(t)-a} \cdot \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} \\ &= \frac{\varphi'(t)}{\gamma(t)-a} - \frac{\varphi'(t)}{\gamma(t)-a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de $\frac{\varphi}{\gamma-a}$ est nulle sur $[\alpha, \beta] \setminus S$, et comme S est un ensemble fini, $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-a}$ est constante sur $[\alpha, \beta]$.

Or, en α , on a $\frac{\varphi(\alpha)}{\gamma(\alpha)-a} = \frac{1}{\gamma(\alpha)-a}$, donc, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-a} = \frac{1}{\gamma(\alpha)-a}$, ie
 $\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-a}{\gamma(\alpha)-a}.$

De plus, comme γ est fermé, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ et donc

$$\varphi(\beta) = \frac{\gamma(\beta) - a}{\gamma(\alpha) - a} = \frac{\gamma(\beta) - a}{\gamma(\beta) - a} = 1.$$

Conclusion : $\text{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$.

2. L'application $\text{Ind}_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue. Comme l'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe, Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de Ω .

3. On a $|\text{Ind}_\gamma(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(z)|}{|\gamma(z) - a|} dz$.

Prenons a dans la composante connexe non bornée de Ω . On peut faire $|a| \rightarrow +\infty$, et par interversion limite intégrale, on a $\lim_{|a| \rightarrow +\infty} \text{Ind}_\gamma(a) = 0$, donc $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$. □

Lemme Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens direct. Alors $\text{Ind}_\gamma(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } |a| < R \\ 0 & \text{si } |a| > R \end{cases}$.

Démonstration. Ici, Ω n'a que deux composantes connexes : l'intérieur du cercle, et l'extérieur du cercle qui est celle non bornée.

On a donc déjà le résultat $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$ si $|a| > R$, par le point 3 de la proposition.

Pour l'intérieur du cercle, comme Ind_γ est constante sur cette composante connexe, il suffit de faire le calcul pour 0 :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Application Soit γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens direct.

Calculons $\int_{\gamma_R} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} dz$ en fonction de R . Posons $f(z) := \frac{1}{2z^2 - 5z + 2}$. Alors f a deux pôles, $\frac{1}{2}$ et 2 ; on peut donc réécrire $f(z) = \frac{1}{2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2)}$.

Puis, par le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \left(\text{Res}_f \left(\frac{1}{2} \right) \text{Ind}_{\gamma_R} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Res}_f(2) \text{Ind}_{\gamma_R}(2) \right).$$

- $\text{Res}_f \left(\frac{1}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) f(z) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2} - 2\right)} = -\frac{1}{3}.$

$$\text{Res}_f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)f(z) = \frac{1}{2\left(2 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

- Si $R < \frac{1}{2}$: d'après le lemme, $\text{Ind}_{\gamma_R}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Ind}_{\gamma_R}(2) = 0$. Donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Si $\frac{1}{2} < R < 2$: $\text{Ind}_{\gamma_R}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $\text{Ind}_{\gamma_R}(2) = 0$. Donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \left(-\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 \right) = -\frac{2i\pi}{3}.$$

Si $R > 2$: $\text{Ind}_{\gamma_R}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Ind}_{\gamma_R}(2) = 1$. Donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \left(-\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 \right) = 0.$$